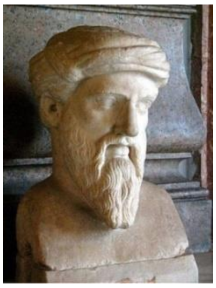
数学基礎講座・付録エピソード集

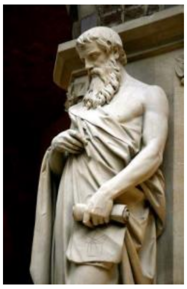
目　次

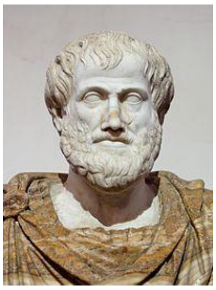
１．王様も苦手だった数学

数学は苦手という人が少なくないようです。小学校の算数は面白かったのに、どこでつまずいたのでしょう。確かに数学には抽象的な概念や見慣れない記号がたくさん出てきて、日常生活の直感ではわかりにくいですね。このエピソード集は、数学の面白さを知っていただけそうな短い話を集めたものです。「好きこそものの上手なれ」という言葉があるように、好きになれば勉強も進むだろうと期待します。

三平方の定理（ピタゴラスの定理）で知られるピタゴラス（Πυθαγόρας：BC582～496）は古代ギリシャの数学者・哲学者でした。幾何学（geometria：γεωμετρία）を体系化した「原論」を著して幾何学の父と呼ばれたユークリッド（ギリシャ語ではエイクレイデス Εὐκλείδης：BC330 頃？）は、古代エジプトで活躍したギリシャ系の数学者・天文学者でした。現代人が学ぶ幾何学は彼らの研究成果なのです。


ピタゴラス


エイクレイデス


アリストテレス

哲学者アルキメデス（Ἀρχιμήδης：BC287?～212）によると、幾何学の難しさに音をあげたエジプト王プトレマイオス１世（Πτολεμαῖος：BC367～282）が先生のユークリッドに「幾何学を学ぶのに易しい近道はないのか？」と聞いたそうです。でも答は「幾何学に王道はありません」と冷たいものでした。絶大な権力を持つ王様でも数学はコツコツ勉強するしかないのですから、皆さんも頑張ってください。

なお、当時の全世界であるギリシャ、エジプト、メソポタミア、ペルシャ、インド北西部を短期間で征服したアレキサンダー大王（ギリシャ語ではアレクサンドロス **Ἀλέξανδρος**：BC356～323）は、少年時代に最高の家庭教師から教育を受けました。マケドニア王の父・ピリッポス二世（Φίλιππος Β：BC382～332）が有名な哲学者アリストテレス（**Ἀριστοτέλης：BC384～322**）を雇ってくれたのです。そのとき一緒に勉強した若者達が後に彼の腹心の部下になり、占領した地方を与えられて統治しました。だからエジプト最後の王朝プトレマイオス朝はギリシャ系で、都はアレキサンドリア（Ἀλεξάνδρεια）なのです。最後の王はクレオパトラ女王（Κλεοπάτρα：BC69～30）で、鼻が高くギリシャ語を話しました。

古代ギリシャでは代数学（algebra） も発展し、プラトン（ **Πλάτων**：BC427 -347）の頃には幾何学図形のそれぞれの線に文字を添えて式の項として使用する幾何代数が盛んでした。ディオファントス（Διόφαντος：BC200？-298？）はアレキサンドリアの数学者で、『算術』を著述して代数学の父と呼ばれました。内容は代数方程式の解法に関するものなどで、起源は古代インドでした。代数学にはメソポタミア文明が起源のものも入っており、9 世紀にバグダットの数学者アル＝フワーリズミー（780-850？）の著書がラテン語に翻訳され、ヨーロッパに広まりました。

２．体温計で困った話

ある日、長年使っていた電子体温計の電池が切れました。電池を入れ替えたら正常に動作するようになったのですが、しばらくすると“ERR”（エラー）という文字が表示され、測れなくなってしまいました。もう一度電池を交換したが結果は同じでした。

近くのドラッグストアでは体温計が品切れでした。通信販売サイトで注文したら、国産品ではないので配送に 3 週間かかるとのことです。体温は毎日測りたいので、注文した体温計が届くまでの間、冬季の床の温度などを計っている赤外線式の温度センサーを使うことにしました。対象に向けて引き金のようなレバーを引くと「ピッ」という音がして一瞬で温度が測れます。使ってみたら腋（わき）の下は低めの値、口の中ではやや高めの値、耳の穴では妥当な値が示されます。腋の下が低めなのは、皮膚が外気に触れて温度が下がった状態を一瞬で測るから、口の中が高めなのは深部体温だからでしょうか。

非接触式の赤外線温度計

注文した電子体温計が届いたのでさっそく使ってみたら、体温が華氏（°F）で表示されます。説明書代わりの細長いカードに小さな文字の英文で、電源ボタンを十分長い時間押し続けると華氏（°F）と摂氏（℃）の切り替えができると書いてあります。以前の電子体温計もそうだったのでなるほどと思ったら、裏切られました。その操作を何度試しても温度表示が華氏（°F）のままで変わらないのです。

販売店にメールで問い合わせたら、技術的なことなのでメーカーに返事するよう伝えますと、たどたどしい日本語の返事が来ました。翌日、説明書を添付するので見て下さいという日本語のメッセージと簡単な図入の表が届きましたが、華氏と摂氏の両方が表示できるということしかわかりません。

通信販売サイトを見直したら少し値段の高い国産品があり、注文すれば翌日に届くことがわかりました。それを注文したら翌日には届き、体温は摂氏（℃）で表示されます。説明書通り、電源ボタンを長押しすれば華氏（°F）表示になり、もう一度同じ操作をすれば摂氏（℃）に戻ることが確認できました。

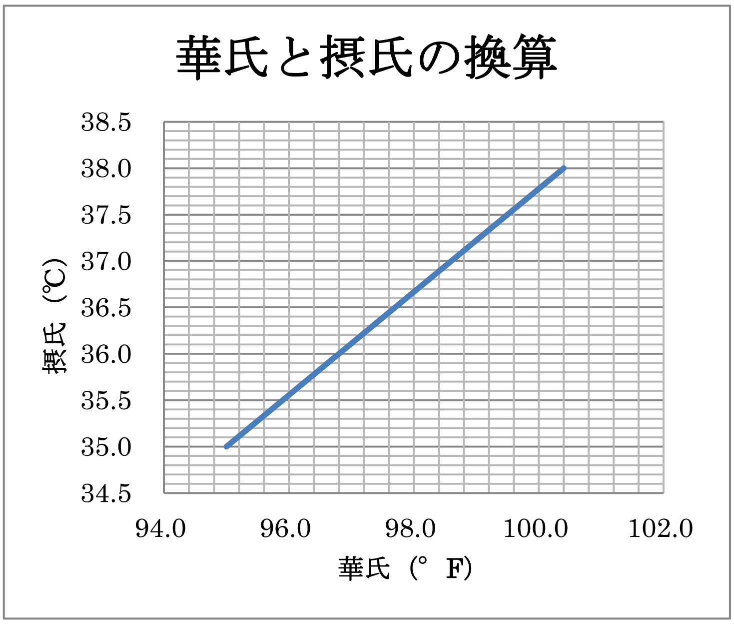
せっかく買った体温計は華氏（°F）しか表示しないが、有効利用したいと華氏（°F）で表示される体温 T_F を摂氏（℃）の体温 T_C に換算する数表を作ってみました。計算式は単純で次の通りです。

$T_C = (T_F - 32) / 1.8$　または　$T_F = T_C \times 1.8 + 32$

作った換算表は次の通りで、体温の低い方が上で高い方が下、つまり昇順です。アルコール式の温度計は気温の高い方が上ですが、デジタル表示なので上下や左右を合わせる必要はないと考えました。

体温計と華氏（°F）から摂氏（℃）への換算表

ついでに換算用のグラフも作ってみました。下の華氏目盛りで表示された温度に定規を当て、グラフの線と交わるところを左の摂氏の目盛りで読みます。摂氏から華氏への変換はその逆なので簡単です。



華氏から摂氏への変換グラフ

３．いろいろな温度単位

アメリカなど温度として華氏（°F）が使われている国に行くと、しばらくは天気予報の気温を見てもピンときません。でも、しばらく滞在しているとだんだん体感的にわかるようになります。30°Fは水が氷る寒さ、70°Fは心地よい暖かさ、80°Fは汗ばむ暑さです。実は温度には次の三種類があるのです。

① 最初に温度計を作ったドイツの物理学者の名前にちなむFarenheit度（華氏。°F）
② 1気圧における水の氷結温度を0度、沸騰温度を100度としたCelcius度（摂氏。°C）
③ 絶対0度（-273.15℃）を基準に摂氏と同じ間隔で定義し、熱力学の国際標準単位になっているKelvin度（ケルビン度。K）

科学的にはケルビン度（K）が合理的ですが、歴史的な経緯や日常生活への密着度の関係で統一は困難でしょう。気体の温度と体積の関係はケルビン度（K）に比例するので、摂氏（℃）で計算する際に両者の差（273.15度）の補正計算が必要です。照明装置の光の色を表すのに「色温度」というケルビン度（K）を使うのは、光の色が放射体の表面温度によって変化するからです。

日本では1885年（明治18年）に国際メートル法条約に加盟しましたがなかなか普及せず、1951年に伝統的な尺貫法の使用を禁止したのに、メートル法が日常生活レベルに定着するには何十年もかかりました。アメリカ政府にはメートル法の普及を進める専門機関がありますが、なかなかうまくいっていません。物理や化学をインチ、フィート、ヤード、ポンド、オンス、華氏という単位系で勉強すると計算の際の係数が複雑で大変ですが、先生も生徒もそういうものだと不思議には思わないらしいのです。

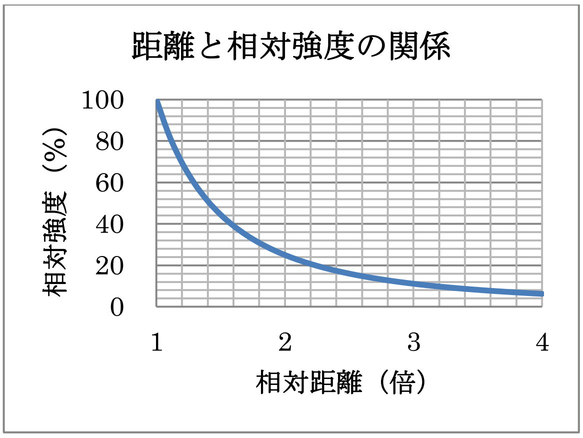
異なる単位系が比例関係であれば簡単な一次式で表すことができますが、毎回計算するのは面倒なので換算表や換算グラフを作っておくと便利です。距離の海里（NM）とキロメートル（Km）、長さのフィート（f）とメートル（m）などは原点が同じで単位量が違うだけなので、変換式は係数の掛け算か割り算になります。華氏と摂氏のように原点と単位量（刻み）の両方が違う場合は、摂氏とケルビン度のように原点が違うたけの場合よりも少し複雑ですが、小学生の算数レベルで変換できます。

ところが暦の変換計算は難しいのです。太陽暦を採用している台湾の民國歴や現代タイの仏教歴（仏滅歴）などを西暦年に変換するには起源の年の差を加減すればよいのです。でも、イスラム歴（ヒジュラ歴）はユリウス歴622年7月16日を紀元1年1月1日とする太陰歴なので、年間の日数が太陽暦と違うので、単純には計算できません。また、仏教歴は国によって1年の差があるので注意が必要です。

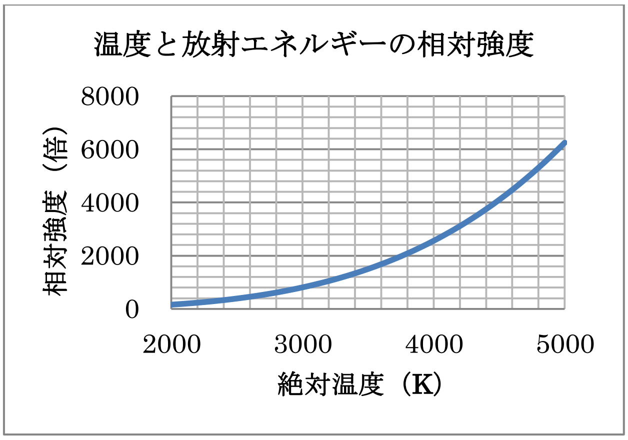
さらに、日本の元号も不定期に変わるので単純計算では同じ元号内の変換ができず、元号が違う場合は対比表が必要です。西暦の場合も、1582年に従来のユリウス歴の閏（うるう）年の誤差を改良したグレゴリオ歴が採用されたので、それ以前の年月日を現在の暦に変換するのは単純ではありません。古い時代の出来事や人物の生年月日などは、どちらの暦によるものなのかを確認する必要があるのです。

４．二乗や四乗に比例／反比例

電波や光の強度は距離の二乗に反比例します。黒体（表面が反射しない物質でできているもの）の放射エネルギーは絶対温度（K）の四乗に比例します（シュテファン・ボルツマンの法則）。これらは縦軸と横軸のグラフ面に相互の関係を示す線が 1 本だけですむ関係です。以下に簡単な例を示します。



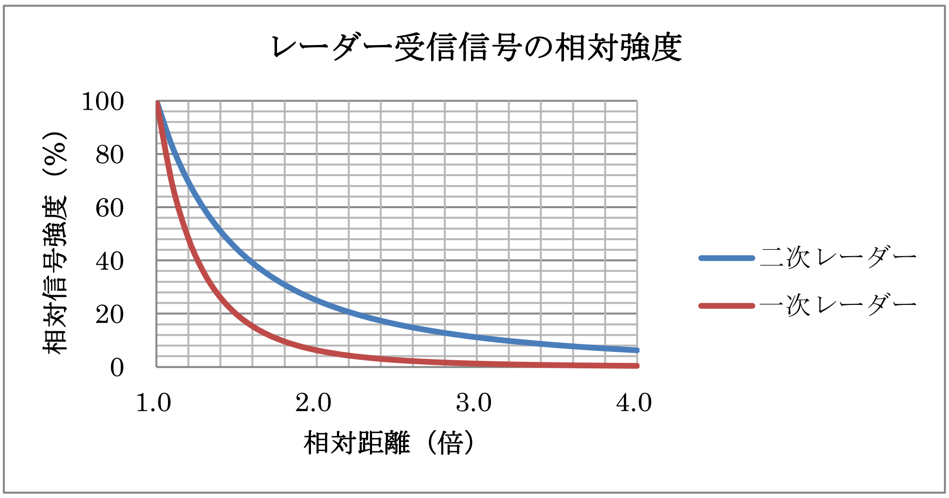
二乗に反比例する関係



四乗に比例する関係

レーダーには、連続波(Continuous Wave：CW)を使う方式とパルス波（Pulls Wave：PW）を使う方式の区別の他、目標からの反射波を使う方式と応答波を使う方式の区別があります。捜索用のパルス電波を発射し、目標からの反射波を受信するのが一次レーダー（Primary Radar)、航空機が搭載している応答装置（Transponder）からの応答を受信する二次レーダー（Secondary Radar）です。

一次レーダーの場合は送信した捜索パルスが距離の二乗に反比例して減衰し、目標からの反射波も距離の二乗に反比例するので、反射波の信号強度は距離の四乗に反比例します。つまり非常に微弱になります。それに対して二次レーダーの場合は、航空機の応答装置が受信する捜索パルスの受信強度は距離の二乗に反比例し、応答信号の受信強度も距離の二乗に反比例するので、送信出力が小さくて済みます。



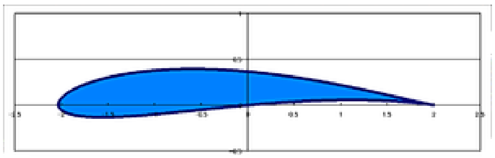
一次レーダーと二次レーダーの受信信号の距離と相対強度の関係

５．要素数が多い関数のグラフ

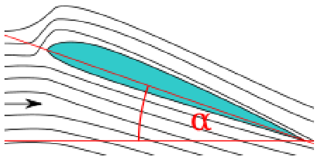
要素がたくさんある関数のグラフはどうなる描けばよいでしょう。例えば、L：揚力、ρ：空気密度（1.293Kg/m^3)、V：速度（m/S)、S:表面積（m^2)、C_L:揚力係数（Co-efficient of Lift）とした場合、翼の揚力 L は次の計算式で求められます（実際の翼の形状は複雑なので、細かく分割して計算します)。

$$L = 1/2 \times \rho V^2 S C_L$$

これを言葉で表現すれば、揚力Ｌは、空気密度ρ、速度 V の二乗、表面積Ｓ、揚力係数 C_Lに比例し、係数は 1/2 である、となりますが、どちらがわかりやすいでしょう（どちらもわかりにくいかも)。

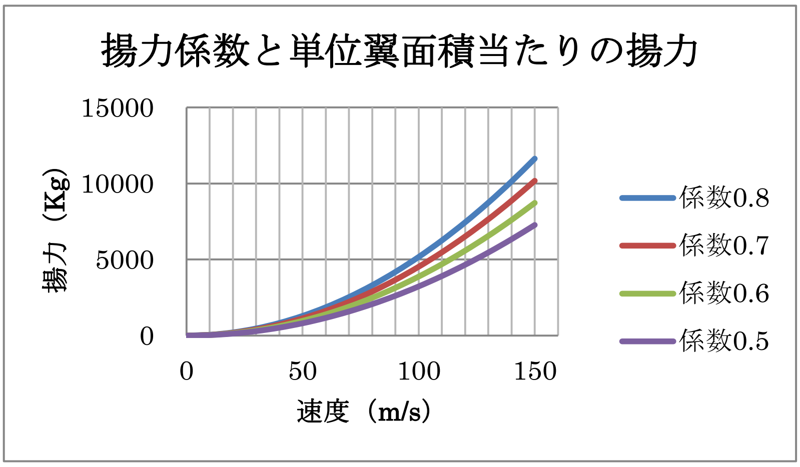


航空機の主翼断面例



翼の向い角

この例では要素が５つあるのに、グラフの X 軸と Y 軸に二つの要素しか表せません。したがって、目的に応じて要素の組合せを選び、その種類の数だけグラフを作成する必要があります。５種類から２種類とる組合せは、${}_5C_2$＝5!／2!（5-2）!＝120／12＝10 で、10 通りです。一枚のグラフに複数の曲線を描く場合の組合せは、${}_5C_3$＝5!／3!（5-3）!＝120／12＝10 で、やはり 10 通りのグラフが必要です。

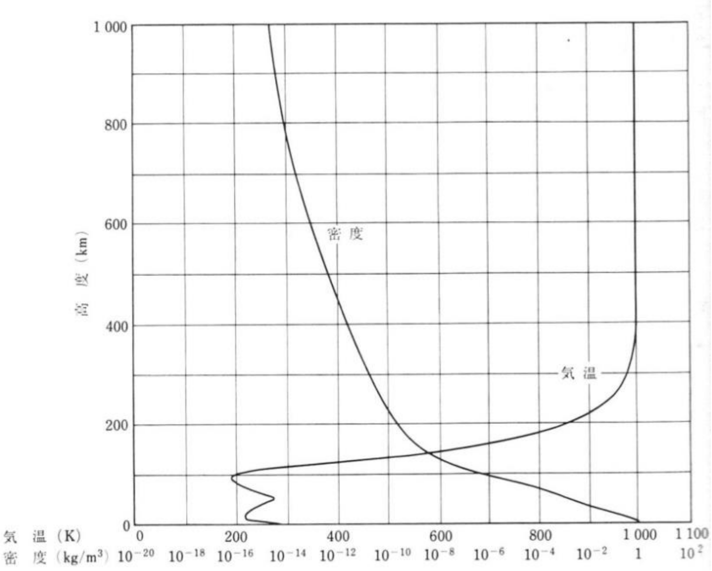


条件により複数の線が必要な特性図の例

グラフはX軸上の特定の場所に定規を当ててグラフと交わる場所をY軸から読み取る方が簡単ですが、精度が低くなります。また、たくさんの曲線が描かれているグラフでは、間違った曲線を選ばないよう注意が必要です。細かな数値を知るためには早見表（数表）が便利ですが、数表は飛び飛びの値しか表示できませんから、中間の値は前後の数値を使って比例配分計算をする必要があります。

６．狭い範囲での法則性

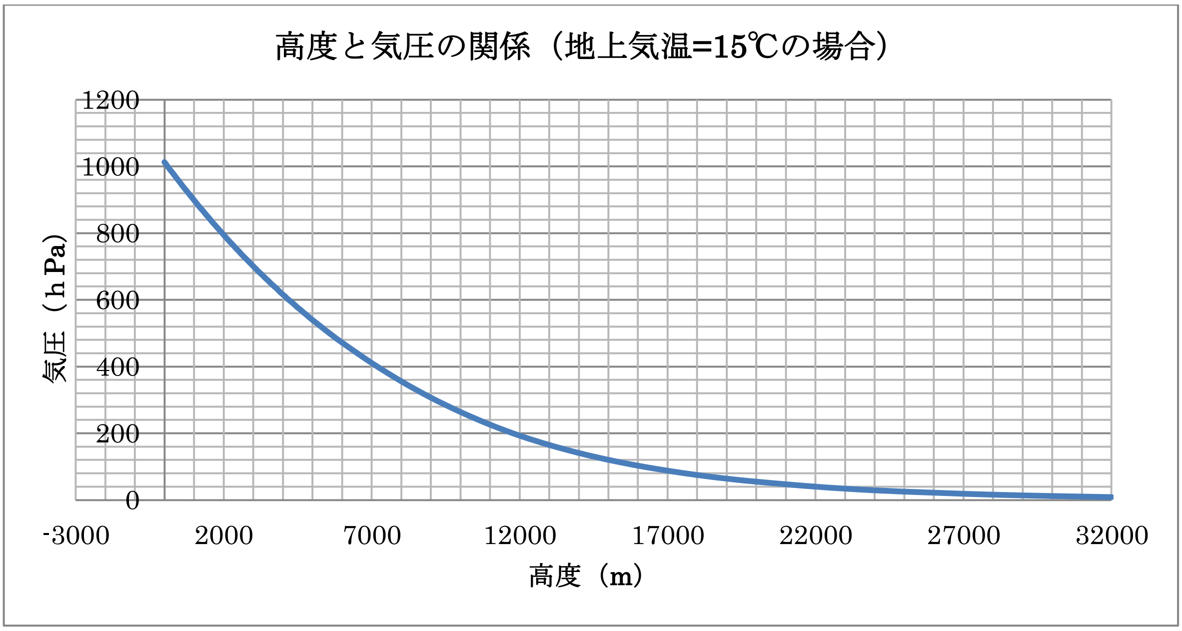
自然現象は非常に複雑で、さまざまな要素で変動し、法則性がわからないものも少なくありません。例えば、大気圏から宇宙空間までの気温と密度の高度分布は左のグラフの通りですが、気温にはふたつの「コブ」があり、法則性がよくわかりません。でも、航空機が飛行する大気圏内（左の図のふたつのコブよりも下の 32,000m まで）に限れば、右の数表のような標準モデルを基準にできます。地表での気圧（高気圧や低気圧）や気温の標準からのズレは補正して使います。なお、高度が－400m からになっているのは、イスラエルとヨルダンの間にある死海の水面が平均海水面よりも約 400m 低いためです。



US 標準大気の気温と密度と高度の関係

(m)	気温 (℃)	気圧 (hPa)	(m)	気温 (℃)	気圧 (hPa)	(m)	気温 (℃)	気圧 (hPa)
−400	17.6	1062.2	4800	−16.2	554.8	10000	−50.0	264.4
−200	16.3	1037.5	5000	−17.5	540.2	10200	−51.3	256.4
0	15.0	1013.3	5200	−18.8	525.9	10400	−52.6	248.6
200	13.7	989.5	5400	−20.1	511.9	10600	−53.9	241.0
400	12.4	966.1	5600	−21.4	498.3	10800	−55.2	233.5
600	11.1	943.2	5800	−22.7	484.9	11000	−56.5	226.3
800	9.8	920.8	6000	−24.0	471.8	11500	−56.5	209.2
1000	8.5	898.7	6200	−25.3	459.0	12000	−56.5	193.3
1200	7.2	877.2	6400	−26.6	446.5	12500	−56.5	178.6
1400	5.9	856.0	6600	−27.9	434.3	13000	−56.5	165.1
1600	4.6	835.2	6800	−29.2	422.3	13500	−56.5	152.6
1800	3.3	814.9	7000	−30.5	410.6	14000	−56.5	141.0
2000	2.0	795.0	7200	−31.8	399.2	14500	−56.5	130.3
2200	0.7	775.4	7400	−33.1	388.0	15000	−56.5	120.4
2400	−0.6	756.3	7600	−34.4	377.1	15500	−56.5	111.3
2600	−1.9	737.5	7800	−35.7	366.4	16000	−56.5	102.9
2800	−3.2	719.1	8000	−37.0	356.0	17000	−56.5	87.9
3000	−4.5	701.1	8200	−38.3	345.8	18000	−56.5	75.0
3200	−5.8	683.4	8400	−39.6	335.9	19000	−56.5	64.1
3400	−7.1	666.2	8600	−40.9	326.2	20000	−56.5	54.7
3600	−8.4	649.2	8800	−42.2	316.7	22000	−54.5	40.0
3800	−9.7	632.6	9000	−43.5	307.4	24000	−52.5	29.3
4000	−11.0	616.4	9200	−44.8	298.4	26000	−50.5	21.5
4200	−12.3	600.5	9400	−46.1	289.6	28000	−48.5	15.9
4400	−13.6	584.9	9600	−47.4	281.0	30000	−46.5	11.7
4600	−14.9	569.7	9800	−48.7	272.6	32000	−44.5	8.7

国際民間航空機関（ICAO）の標準大気



ICAO 標準大気（ISA）による高度と気圧の関係

７．数字ばかりの本

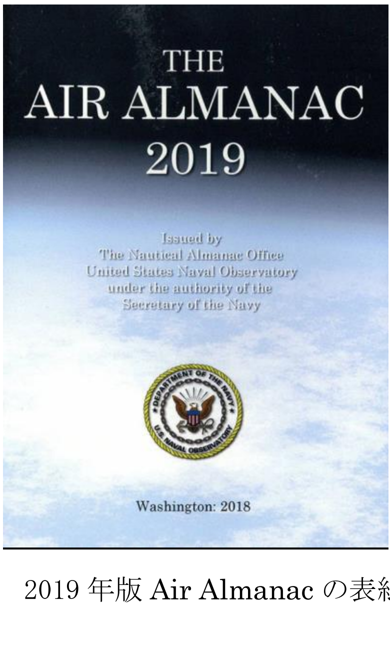
世の中にはさまざまな数表があります。身近なのは水道料金や郵便料金、税額などでしょう。理科年表も大部分が数表です。大昔は筆算か算盤で、昔は電卓でひとつずつ計算したので、数表を作るのは大変な作業でした。今はパソコンの表計算ソフトで簡単に作ることができます。表計算ソフトには、よく使う各種の関数があらかじめ組み込まれていて、自分で計算式を入力する必要は少なくなっています。

後述する三角関数や対数は、精密な数表があってこそ実用になります。つまり、最初にだれかが数表を作ってくれれば、他のたくさんの人達が恩恵をうけるという貴重な仕事なのです。でも、ある中世の天文学者が一生かけて作った膨大な数表の一部に誤りがあることが没後に見つかったという、気の毒な出来事もありました。ところで、あなたは三角関数や対数の数表を筆算で計算できますか。

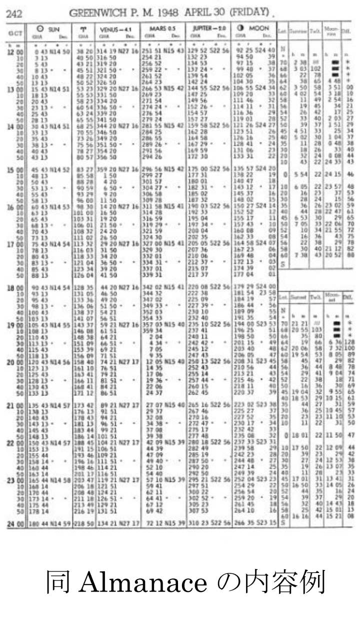
世界初のコンピューターENIAC が開発された目的は、砲兵隊の射撃用数表の作成でした。大砲の射撃には距離や高低差、空気密度（気圧と気温で変化）、砲弾の重量、火薬の量、緯度による地球の自転により働く力、風の影響など、たくさんの要素があります。それを現場で計算するのは大変なので、あらかじめ早見表を作っておくのです。英雄ナポレオンは砲兵将校から出世して皇帝まで上り詰めましたが、フランス学士院の数学部会長を務めたそうです。名誉職だったかもしれませんが、数学が得意でない砲兵将校などはあり得ないので、当時の最高レベルの数学者達と高度な数学の議論ができたのでしょう。

船や航空機が天測航法には、太陽や月、主な天体の日時ごとの位置など、膨大な基礎データが必要です。もちろん天体の位置（地平線または水平線からの仰角）を測定する六分儀と正確な時計も必要です。昔の旅客機や爆撃機の縦室には天測用の天窓があったことをご存知でしょうか。毎年、船舶用には航海暦（Nautical Almanac）、航空機用には航空暦（Air Almanac）という分厚い本が発行されていますが、内容は数字の羅列、つまり数表集です。今はインターネットから無料でダウンロードできます。

操縦室からの天測の様子



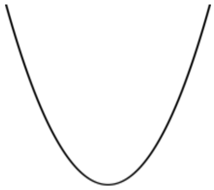
2019 年版 Air Almanac の表紙

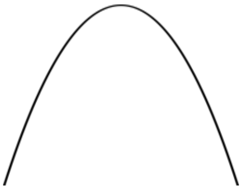


同 Almanace の内容例

８．放物線はどんどん速く落ちる曲線

ボールなどを空中に放り投げるとゆるやかなカーブを描くので「放物線」と呼びますが、これは凸部が上にある二次関数の曲線です。鉄砲や大砲の弾も、そして砲弾の軌道という意味から名付けられた弾道ミサイルも、放物線を描いて飛びます。角度と初速度がわかれば二次方程式を使って軌道を計算でき、軌道途中の位置データが複数個得られれば残りの軌道が予測できますから、迎撃もできます。


教科書の二次曲線

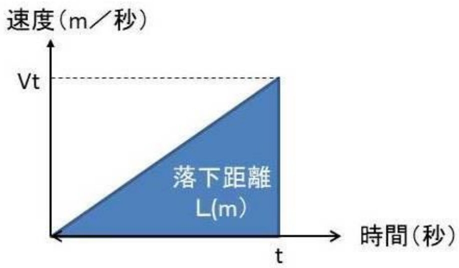

放物線


自動小銃


弾道ミサイル

このような曲線になるのは、支えがない空中の物体は水平方向に動いている間に地球からの引力（重力）を受けるので、落下速度がどんどん速くなるからです。落下速度 V（m/秒）は重力の加速度 g（9.8/mS^2）×時間 t（秒）で速くなるので、t 秒後の落下速度 Vt は gt（m／秒）となります。t 秒間に落下する距離 L（m）は、速度 V×時間 t なので下図の三角形の面積に相当する 1/2・gt^2 となります。ガリレオ・ガリレイが実験したように、ピサの斜塔から大小の鉄の玉を落とすと同じ加速度でどんどん速くなりながらまっすぐ下に落ちますが、水平方向に投げると等速運動と組合せの放物線という曲線になります。

ピサの斜塔



時間による落下速度の増加と距離

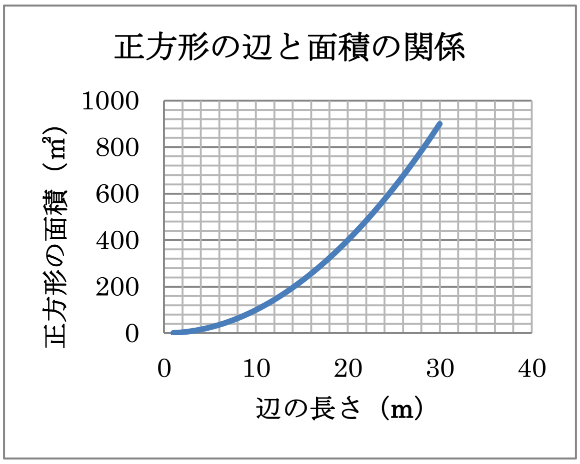
野球の投手と打者

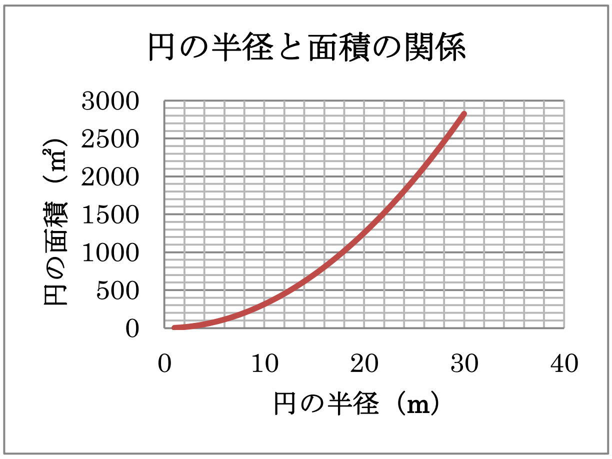
野球の投球方法のひとつに「スローボール」があります。投手が非常に速度の遅い投球をすると、普通の速さに慣れた打者がうまく打てないところを狙ったものです。でも、あまり速度が遅いとボールは打者のストライクゾーンまで届かず、手前に落ちてしまいます。始球式ではワンバウンドのボールを投げる習慣らしいですが、スローボールは打者のストライクゾーンまでは飛ばなければなりません。

プロ野球では時速 150Km 以上の投球をする選手が少なくありませんが、遅いボールの速度を計算した人は少ないでしょう。なお、弾道コースの飛距離が最大になるのは角度 45 度の場合で、投手のいるマウントから打者のいるホームベースまでの距離は 18.44m です。興味のある方は、投手と打者の肩の高さを同じと仮定し、ボールの最低速度を計算してみてください。後述するベクトルの考え方で水平方向の速度成分と垂直方向の速度成分を分解して考えることになります。

9．面積は爆発する

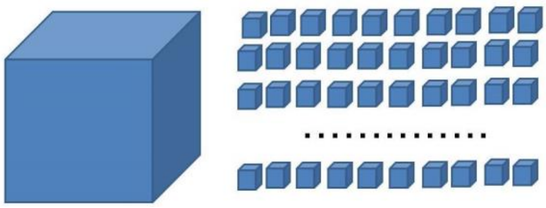
正方形の面積Ｓは一辺の長さ l の二乗、つまり l^2 です。また、円の面積Ｓは、半径をｒ、円周率を π とすると、πr^2 になります。さらに、一辺の長さ l の立方体の表面積Ｓは $4l^2$、半径ｒの球の表面積Ｓは $4\pi r^2$ になります。つまり、面積や表面積は長さの二乗に比例します。





小麦粉や砂糖などの微粉末が、電気スイッチの火花などで引火して大爆発することがあります。炭鉱では石炭粉塵による爆発事故が起ききます。小麦や砂糖は炭素と酸素と水素の化合物ですし、石炭は炭素なので可燃物ですが、常温では簡単には火が着きません。それが微粉状態だと簡単に引火するのは、体積（重量）あたりの表面積が桁違いに大きくなり、空気中の酸素と結合しやすくなるからなのです。

計算を簡単にするため、粒子を角砂糖のような立方体だと仮定します。1辺の長さが 1cm の場合、$1cm^2$ の面が４面あるので表面積は $4cm^2$ です。これを分割して一辺の長さを 1/10 の 1mm にすると、1,000（＝10×10×10）個の立方体ができます。それぞれに $1mm^2$ の面が 4 面できるので表面積は $4mm^2$／個となり、それが 1,000 個できるので合計は $4mm^2$／個×1,000 個＝$4,000mm^2$、つまり $40cm^2$ になります。



一辺 1cm の立方体を一辺 1mm の立方体に分割する

1辺の長さを更に 1/10 の 100μｍ（ミクロン）にし、更に 1/10 の 10μｍの 10μｍにしてみます。髪の毛の太さは 50μｍ位です。一辺を元の１cm の 1,000 分の１の１０μｍの立方体に分割すると、それぞれに $10\mu m^2$ の面が 4 面できるので表面積は $40\mu m^2$／個となります。それが 1,000,000,000（10 億）個できるので、表面積の合計は $40,000,000,000\mu m^2$＝$4,000cm^2$ となります。これだけ空気に接する面積が増えれば、火花ひとつで発火するのに十分なのです（こんなに”0”がたくさん続く計算はしたことがありません。指数を使えば簡単ですから。"0"の数に間違いないか、念のため検算してみて下さい）。

１０．長さと表面積と体積

一辺の長さlの立方体の体積Ｖは V= l^3、球の体積Ｖは 4/3・πr^3 です。つまり、体積は長さの三乗に比例します。動物の体形が相似形だと仮定すると、身長が 2 倍なら表面積は二乗の 4 倍に、体積は三乗の 8 倍になります。体重が体積に比例すると仮定すると、身長が２倍のときは８倍になる体重を支える骨の断面積は 4 倍にしかならないので、強度が不足して骨折してしまいます。身長が 2 倍の体重を支えるにはかなり骨太にならなければなわないわけです。

陸上動物で一番大きいのはアフリカゾウ象で、体長が 6～7.5m、体高 3～3.8m、体重 5.8～7.5 トンもあります。絶滅したマンモスはもっと大きかったし、最大の恐竜は全長が 30m もあったようです。そんな巨大な体を支える足はどんな構造だったのでしょうね。

水中動物で最大なものはシロナガスクジラで、体長 30m、体重 100 トンにもなりますが、海水中で浮力を受けた状態で生きる生物なので、骨格はそれに適応しています。だから、海岸に打上げられて浮力がなくなると自分の体重で内蔵を押しつぶされ、早く海に戻してやらないと死んでしまうそうです。

空想上の怪獣ゴジラは当初、身長 50m という設定で東京のビル群を壊しまわりました。当時の建築基準法で地上高 31m（≒尺貫法の 100 尺）までのビルしかなかったためです。その後、60m の高層ビルが建てられるようになると、ゴジラは 80m に「成長」し、さらに 100ｍを超える超高層ビルが建つようになると、身長は 100m になりましたが、そんな超大型生物が本当に地上で生息できたのでしょうか。

怪獣ゴジラ

身長 100m、体重９万トンのゴジラの体重を支え、ビル群をなぎ倒し、踏みつぶすことができる強い骨格と強力な筋肉、それらを維持するエネルギー代謝は可能でしょうか。カルシウムの骨、タンパク質の筋肉や皮膚など、普通の生命体では無理でしょう。空想の世界なので、特殊な物質でできた強い骨格や原子力エネルギーによる代謝などを仮定するのは自由ですが、実際には様々な制約があるのです。

なお、ゴジラの背中にあるギザギザしたものは、中生代に活躍した恐竜と同様に体温を大気中に放出するための放熱板に相当する器官です。現代に生きるトカゲの大部分は体が小さいので必要ありませんが、最大 1.8m にもなるイグアナには背中に小さな突起がある他、あごの下に大きな放熱器官があります。

１１．気候と動物の大きさ

寒冷地に生息する動物は体が大きく、特に北極熊や北米の灰色熊は巨大です。日本の本州のツキノワグマは北海道のヒグマ（北米の灰色熊の亜種）よりも小さく、熱帯のジャングルで生息するマレー熊は犬よりも少し大きい位の小型種です。寒冷地で生息する動物は、体が大きい方が体重に対する表面積の比率が小さく、体表からの放熱を抑えることができ保温に有利なのです。それに対し、熱帯の動物は体が小さくて体重に対する表面積の比率が高い方が体温の放熱効率が高いのです。



北極熊（3m、500Kg）　灰色熊（2m、200Kg）　マレー熊（1.4m、50Kg）

人間も同じだという説があります。確かに寒冷な北欧系の人達は大柄で、熱帯に住む人達は小柄でスリムです。人間は衣類や焚火などで調節できますが、動物と同様寒いときの体温の維持と活動時の放熱は生死にかかわる重大な問題です。人類は様々の理由で移住したので単純ではないし生活環境で体形も変わりますが、身長の二乗に比例する体表面積と三乗に比例する体重の制約は避けることができません。

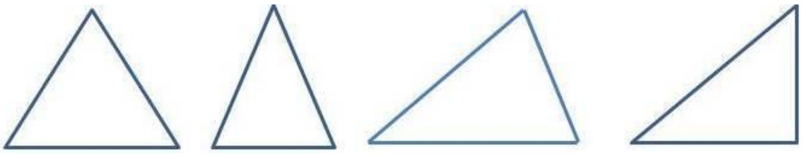
大きさの違う生物の形は相似形ではないことは、鳥類を見るとよくわかります。中には飛ばない鳥もいますが、それぞれが合理的に進化しています。ハチドリのような小さな鳥は翼の面積が小さく翼を動かすのが早く、骨は非常に細く、体重も軽いですが、コンドルのような大きな鳥は翼の面積が大きく動作はゆっくりで、たまにしか羽ばたかず滑空することが多く、体重も重いので骨が太いのです。


ハチドリ（体長 6cm～、体重 2～20g）　コンドル（全長 1.2m、翼幅 3.2m、体重 7.7～15Kg）

飛行機の模型の場合も二乗と三乗の問題はさけられません。縮尺が大きければなるほど、現物と相似形ではうまく飛ばないという問題に直面します。揚力は翼面積、つまり長さの二乗に比例し、速度に二乗に比例するのに、重量は長さの三乗に比例するからです。もっとも最近では大容量の電池や強力な電動モーター、超小型のジェットエンジンなどが出現したので、トラックで運べる最大限の大きさ、つまり５～６ｍもある大型の模型飛行機が盛んに作られるようになり、この問題は回避しやすくなりました。

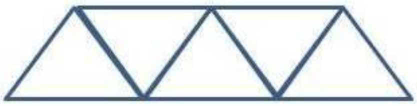
１２．三角形は潰れにくい形

　三角形にはすべての辺が同じ長さの正三角形、ふたつの辺の長さが同じ二等辺三角形、各辺の長さがすべて違う不等辺三角形があります。直角の角をひとつ含む直角三角形もあります。



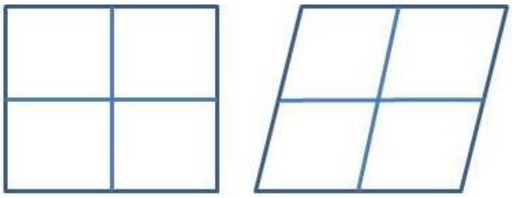
正三角形　　二等辺三角形　　不等辺三角形　　直角三角形

　三角形は辺の長さが変わらなければ形が変わらないので、力がかかっても構造物の形は歪みません。鉄道橋などが鉄骨を三角形に組み合わせた構造で作られるのは、そのためです。



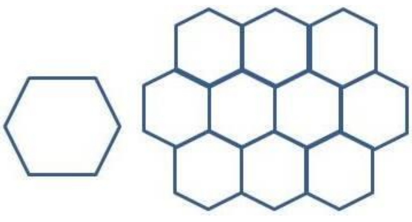
三角形を組み合わせた構造　　鉄骨による鉄道橋

　また、柱と梁という四角形の構造を持つ建物の耐震性を増すため、斜めの補助的な柱や板などによる「筋交い」を入れることがあります。目的は、三角形を形成して歪みにくくするためです。



四角刑の構造物の歪み　　木造家屋の筋交い　　耐震補強した校舎

　例外的に六角形は重ね合わせると非常に強い構造になります。ハチの巣のように六角形を連続させたハニカム構造は、航空宇宙では軽くて強度の強い構造材、建築関係では断熱材などとして広く応用されています。興味のある方は、なぜ六角形が上部なのかを考えてみて下さい。



六角形を組み合わせたハニカム構造とハチの巣

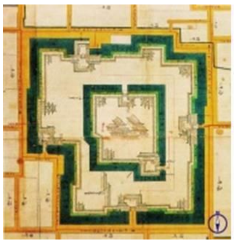
１３．忍者屋敷を買おうと思った話

青森県弘前市の忍者屋敷が売りに出ているというニュースを見つけました。弘前城から徒歩数分の古い民家で、青森大学薬学部の忍者部の活動拠点になっているというのです。なぜ薬学部かというと、忍者達が薬草の収集と加工をしていたからだそうです。オーナーが高齢になり、維持費もかさむので、建物を壊さず維持してくれる人に譲りたいということだったので、電話して話を聞いてみました。

歴史遺産として県か市に買い取ってもらいたがったが、前の居住者が一部を増改築したので文化財の条件を満たさないと断られたというが、建物はしっかりしていて住むのに問題はなさそうでした。でも、広い敷地内に樹木がたくさんあり植木屋さんを頼む必要がある他、豪雪地帯なので除雪費用もかさむとのことで、残念ながら諦めました。市街地なのでお値段もそれなりでしたから。

弘前市の忍者屋敷（写真：東奥日報）

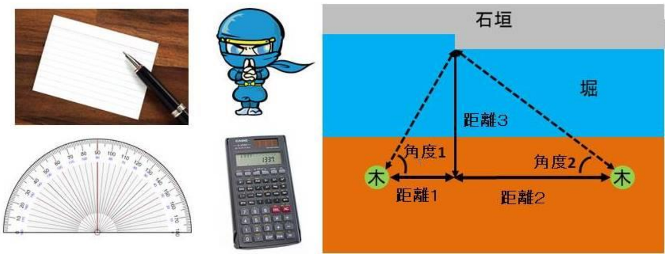
忍者の修行カリキュラムには三角法が入っていたはずです。敵の城下町に偵察に行き、町割りや城、堀、石垣などを調べるには必須だからです。江戸時代末期に伊能忠敬が全国を歩いて地図を作成しましたが、基準線の長さを縄や歩数で測り、山や岬の方角を特製の分度器と磁石で測ったり、板に貼り付けた紙の上に針を立てて地形の縮尺図を書残したりしたはずです。あとは宿でせっせと計算するか、精密に作図して、実際の距離に変換するわけです。違いは、伊能忠敬は幕府公認の作業なので白昼堂々と測量できたのに対し、忍者は見つかれば逮捕されることでしょうか。



城の輪郭

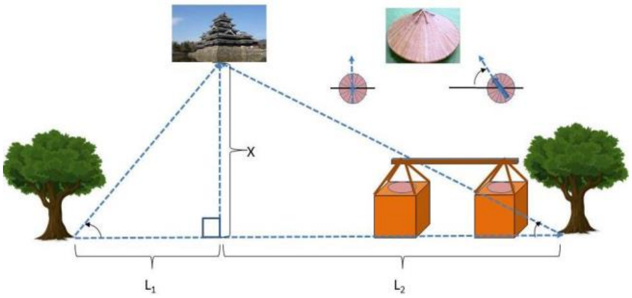
石垣と天守閣

忍者の業務は秘伝なのでマニュアルは残っていません。だから想像するしかありませんが、測量とは実際の地形などを三角形に分解して紙の上に縮尺する作業です。忍者は堀端の立木の間を基準線にして距離を歩数で測り、堀の内側の石垣の角など目標になる点からの垂線と交わる地点までの距離と、基準線の両端から目標への角度を測って持ち帰ったはずです。後で適当な縮尺の図にプロットすれば、知りたい距離、つまり堀の幅を推定することができます。相似三角形の特性を利用するのです。



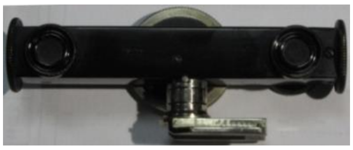
三角測量で堀の幅を計る

城の近くをうろついて怪しまれてはいけないので、行商人に化けようと天秤棒で運ぶ荷物の上部に簡単な分度器を仕込む方法を考えてみました。分度器代わりに雨除けの菅笠（すげがさ）が良さそうです。天秤棒を基準線と平行に置き、菅傘で角度を読めば、かなり正確な測量ができるでしょう。



行商用天秤棒に仕込んだ簡易距離計（イメージ）

昔のカメラには光学距離計がありました。写真は 1930 年代の製品で、約 5cm 離れた二つの対物レンズとプリズム、ハーフミラー、角度を調節するダイアル、接眼レンズで構成され、2.9～100ft（0.85～30m）の距離を測ることができます。ダイアルを回して二重の像が重なったときの目盛りを読むのです。

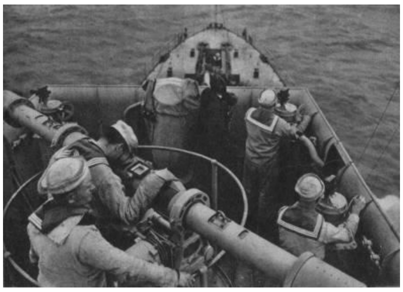


距離計の前面対物レンズ

距離計の上部

距離計の接眼部（左）とダイアル

昔の海軍艦艇には、同じ原理の射撃用光学距離計が搭載されていました。距離を測って砲の仰角と火薬の量を決めるのです。基準線の長さは数 m ですが、巨大戦艦大和の場合は 15m もあったそうです。



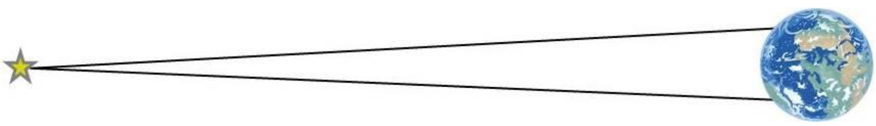
海軍艦艇用の光学測距儀

１４．星までの距離を測る

ナポレオンが科学的に合理性のある度量衡（秤や物差の基準）を制定しようと学者達に命じたときは、緯度１度の長さを正確に計るため、高い山や村の教会の塔などを目標に精密な三角測量を延々と繰返しました。メートルはそのときに測量した緯度の長さを基準に決められたのです。江戸時代後期に日本中を測量した伊能忠敬は、蘭学としてオランダから長崎の出島を経て江戸に伝わった測量法を学びました。

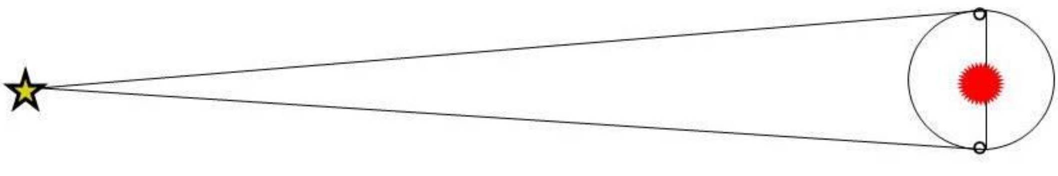
それでは天体までの距離はどうやって測るのでしょう。一番近い月までは「わずか」36 万 Km しか離れていないので、地上に十分長い基準線を設定すれば三角法で測れます。地球は丸いので地上に何百 Km もの基準線を正確に設定するのは簡単ではありませんが、山や岬などを目標に三角測量を繰返せばよいのです。精密な時計も通信手段が無かった時代に離れた場所で同時に天体を観測するのは簡単ではありませんが、方位を北極星で決め、南北に十分に離れた二つの地点で月が真南に来たとき（南中といいます）の仰角を測ったのだろうと思います。もちろん月は大きくて点ではないので、月面のどこを測るかは統一しておく必要があります。

それが火星や木星、土星などになるとちょっと遠く、一番近づいたときでも数千万～数億 Km も離れていますから、基準線をできるだけ長く取る必要があります。それでも、地球の直径が約 12,000Km ですから、4,000m 級の山の山頂にある天文台を使い、地平線／水平線ギリギリの低い仰角でも 10,000Km の基準線を設定するのが限界でしょう。もちろん、天文台と天文台の間は高速度で通信ができ、信号の伝達速度による遅れ時間が正確に測定されている、ということが前提になります。



基準線の長さを１万 km とした場合、一天文単位（AU＝１億５千万 Km：太陽から地球の公転軌道までの距離）は角度 0.038 度（≒2.28 秒）に相当します。火星の公転軌道は半径約 1.4～1.6AU、地球に大接近した際の距離が 5,600 万 Km 程度、木星の公転軌道は半径 4.9～5.4AU なので、太陽系の比較的近くの惑星まで距離（数 AU）なら、誤差はあるものの測れないことはない距離でしょう。なお、このような小さな角度の場合、$\sin\theta$ も $\tan\theta$ も値はほとんど同じです。

ところが地球の直径は「わずか」12,000Km しかないのに、何光年も遠い星までの距離を測るのはとても無理です。そこで、地球の公転軌道の直径（約 3 億 Km）を基線にし、巨大な三角測量を行うようになりました。背景に見えているもっと遠くて動かない恒星との相対位置のずれを調べるのです。



１５．角度か勾配か

Sin や Cos、Tan などの三角関数を使わなくても三角形を利用できる方法があります。たとえば和風建築の大工が使う伝統的な物差に曲尺（かねじゃく）です。直角に曲がった金属製の物差で、矩尺とも書き、指金(さしがね)、まがりがねともいいます。表には尺の普通の目盛、裏には$\sqrt{2}$や1／πの目盛が刻まれていて、丸太から四角や八角の柱を切り出す際の計算ができます。屋根の勾配を分数で測ることもできます。

曲尺(かねじゃく)

神社やお寺などの大きな建物を建てる場合、寺社大工の棟梁は何十畳もある広い作業場一杯に大きな縮尺の図面を描きながら設計し、数十cm～1m位の縮尺モデルを組立てて設計に問題がないかを検証します。もちろん、施主(建築の依頼主)の承認を得るために完成イメージを示す役割もあったでしょう。歴史的な建物の縮尺モデルが残っていて、再建の際の貴重な資料になっているのは、昔はそうした設計プロセスだったからなのです。

鉄道線路では勾配を角度ではなく、1Km あたりの上り下りする高さの差の m 数、つまり‰(パーミル：千分比）で表します。また、道路の場合は 100m あたりの登り／下りの差の m 数、つまり%（パーセント：百分比）で表します。その方が重量とエンジン出力、速度との関係がわかり易いからでしょうか。

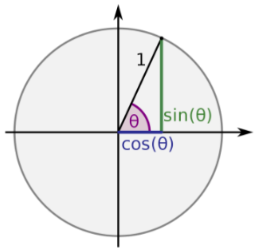
鉄道の勾配（‰）　　道路の勾配（%）

航空機の最終進入経路や出発経路の勾配は角度で表します。たとえば計器進入装置（Instrument Landing System : ILS）の降下角の標準は３.0 度です。昇降計で feet／分の上昇／降下率は分りますが、風によって対地速度が異なるので、降下のスロープ（Glide Slope）に正しく乗っているかどうかを示す計器を使うという前提で、降下スロープを角度で定義しているのである。

航空機の最終進入角（度）航空機の計器進入　旧式の姿勢指示器

１６．古代ギリシャの精密時計

数学が苦手になるきっかけが三角関数だった人は少なくないようです。sin θ 、cos θ 、tan θ などと見慣れない記号が出てくるし、ギリシャ文字の θ （シータ）というのも違和感をつのらせたのかもしれません。最初に一応の説明は聞いたはずでも、まだピンとこないうちに tan θ ＝sin θ ／cos θ である、などという数式がどんどん出てきて混乱したのでしょうか。



古代ギリシャの数学者は哲学者でもあったので、円や三角形にどのような法則性があるのかを単なる知的好奇心で探求していたのかもしれません。しかし、天文学者や建築家、機械職人などの実務者にとっては非常に価値の高い知識体系でした。電気が実用化され、特に交流による発電や送電が主流になると、電気工学の発達には三角関数が大きく貢献し、無線通信がそれに輪をかけました。周期や振幅、位相などはすべて三角関数の概念ですし、二乗すると“－１“になる虚数（ｉ）という実在しない不思議な数も三角関数から導き出されたものです。この基礎理論が無ければ、電気は利用できないのです。

20 世紀初頭にギリシャのアンティキテラ島付近の海底の沈没船から複雑な時計のような謎の機械が発見されました。よくわからないのでアンティキテラの機械（Μηχανισμός των Αντικυθήρων）と呼ばれていますが、天体の運行を計算する歯車式の時計らしいという説が有力です。紀元前 100～200 年頃のものと推定されていますが、幾何学や三角関数は当時から機械工房の弟子の必修科目だったようです。

アンティキテラ島の機械

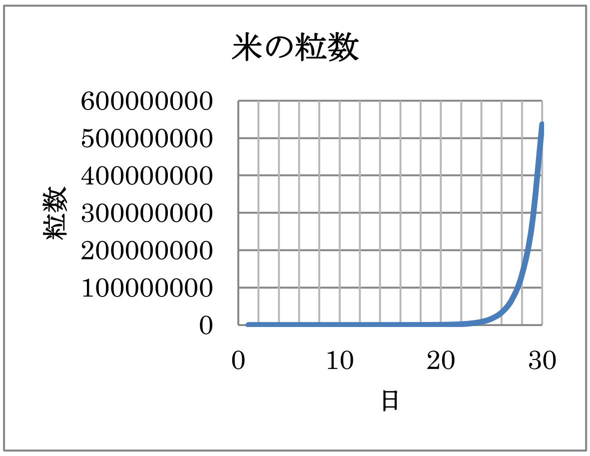
ある政治家が、学校で三角関数を勉強しても実際に使うのは科学者や技術者に限られるので、時間の無駄ではないかと口を滑らせ、世間から大バッシングを受けたことがありました。実際に使う機会がない人達が勉強しなくてもよいのはもっと高度な知識で、基礎的な勉強は必要だと思う人が多かったようです。ものごとの原理原則を理解し、論理的に考える訓練になるという意味では、直接使う機会がない人にとっても有意義なことは間違いありません。優秀な天文学者や建築家など専門家をたくさん雇っていたエジプト王（ファラオ）でさえ、幾何学（当時の数学）の勉強が義務付けられていたのですから。

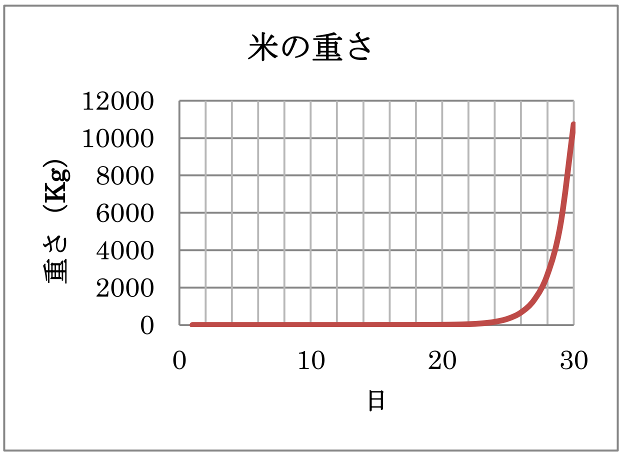
１７．曽呂利新左衛門への米の褒美

豊臣秀吉の家来に曽呂利新左衛門（そろり しんざえもん）という知恵者の家来がいました。ある日、狩に出かけた秀吉が「この山には木が何本あるのか」と質問したので、家来達が手分けして数えようとしたものの重複したりして混乱するばかりです。曽呂利新左衛門が「私にお任せを」と申し出て、千本の縄を準備させ、山の木全部に縄を巻き付けさせました。これなら数え忘れも重複も起きません。残った縄から木の本数が計算できました。

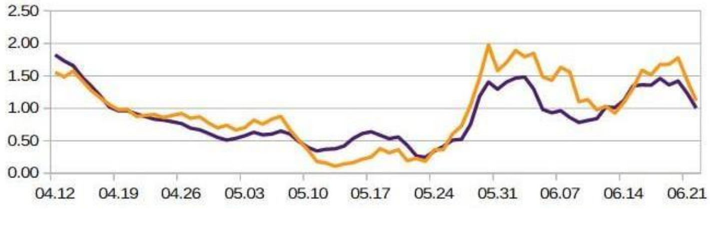
豊臣秀吉の肖像

秀吉は新左衛門に褒美を与えることにしました。新左衛門が「お米をください。今日は1粒、明日は2粒、明後日は4粒と、毎日倍々で30日間いただきたい」と答えたので、秀吉は「わかった。毎日届けさせる」と了承しました。でも、結果は大変なことになりました。23日目に80Kgに、27日目にはトン単位になったのです。以下に毎日の粒数と0.02g／粒として換算した重さのグラフを示します。なお、米1合は150g、1俵は60Kg、1石は150Kgです。





伝染病がひとりの感染者から複数の人に感染して爆発的に広がることをパンデミック（大流行）といい、指数関数の曲線を描きます。一人の感染者から何人に感染するかの比率を「再生産数」と呼び、1.0を超えれば感染者数が増えている状態、1.0未満なら流行が終息に向かっている状態です。下図は2020年の新型コロナウィスル肺炎COVID-19のある時期の再生産数の推移で、青が全国、黄色が東京です。



１８．ネズミ算と高利貸

ネズミは成長が早く一度にたくさん子供を産むので、食料さえ豊富ならばどんどん増えます。だから急激に数が増えることをネズミの大増殖にたとえて「ネズミ算式」といい、元々は和算の「ねずみ算」から来た言葉です。塵劫記という江戸時代の文書にはネズミ算が次の様に記されているそうです。

「正月に、ネズミのつがいがあらわれ、子を 12 匹産む。そして親と合わせて 14 匹になる。このネズミは、二月に子ネズミがまた子を 12 匹ずつ産むため、親と合わせて 98 匹になる。この様に、月に一度ずつ、親も子も孫もひ孫も月々に 12 匹ずつ産む時、12 ヶ月でどれくらいになるかというと、276 億 8257 万 4402 匹となる」

本当かな、と疑問に思った江戸時代人は算盤を駆使して検算したのでしょうが、大変だったと思います。数学を学んでいる現代人のみなさんなら、何を使ってどんな計算をしますか。大型電卓は12桁あるので、1匹単位で正確に計算できますし、大体の数を知りたい場合にはいろいろな方法があります。お手並みを拝見しましょう。

数字がどんどん増える身近なものに金利があります。銀行に預金したり郵便局に貯金したりすれば、今は超低金利だけれど、利息が付きます。また、高価な耐久消費財を買う際にローンを組んだり、カードローンを利用したりすれば借りたお金に利息が付きます。預けていれば金利で額が増えてうれしいけれど、借りている場合は額が増えて大きな負担になります。特に金利が高い場合は注意が必要です。

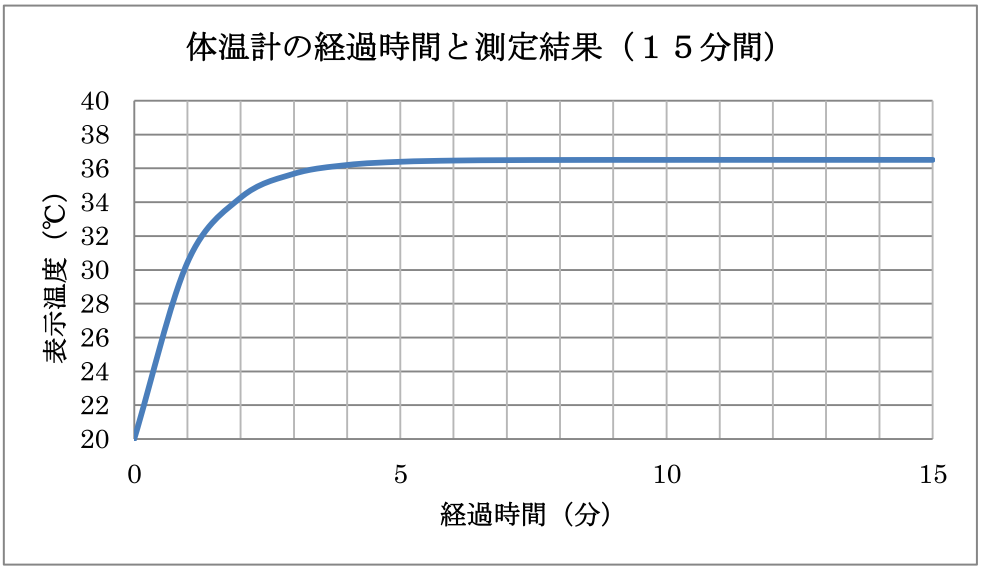
金利は２種類に大別できます。ひとつは単利方式で、元金に対して一定割合の金利を単位期間ごとに支払います。この場合は期間が２倍になっても金利も２倍になるだけです。もうひとつの複利方式では、単位期間ごとの金利が元金に加算され、次の期間はその元利合計額に一定割合の金利が加算されます。つまり、利息が利息を生むので、元利合計はネズミ算式にどんどん増える訳です。

一例として年利 15%の複利の場合、１年目の終りには元利合計額は 115%ですが、２年目の終りには元利合計が 132%となります。単利の場合が 130%なので大した差ではないと思うかもしれませんが、期間が長くなると差は大きくなります。5 年後の終りには単利の元利合計は 175%、複利の場合は 201%となり、10 年後の終りには単利の場合は 250%なのに複利では 405%にもなります。

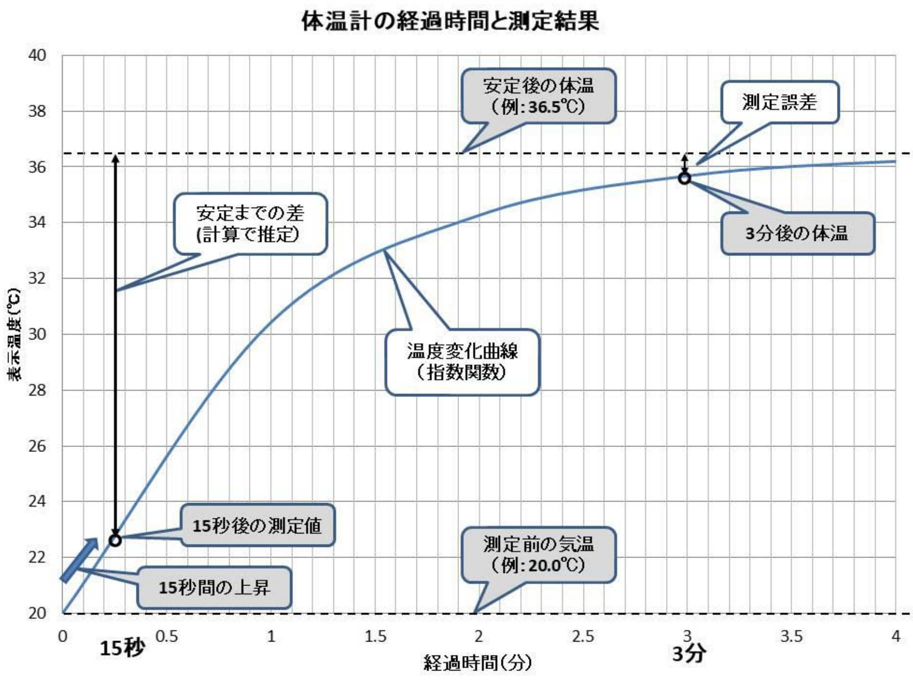
住宅ローンの金利はカードローンなどと比べるとずっと低いが、35 年間という長期の契約があり、返済額が元金分よりも金利の方が大きくなる場合が少なくありません。ネズミなら猫が食べてくれるので爆発的な増殖は抑制されますが、金利を食べてくれる天敵はいないのが悩ましいのです。

１９．秒速体温計の謎

昔の体温計は、赤い色を付けたアルコール（もっと昔は有害な水銀）の温度膨張によって体温を計っていました。だから、体温計を腋の下に挟んでから体温と等しい温度になるまで５分位は必要でした。形や大きさを工夫したものでも３分間は必要で、その場合は少し誤差が大きくなります。気温 20.0℃、体温 36.5℃の場合の体温計の温度変化曲線を指数関数の数式モデルで下図に描いてみました。



最近の電子体温計はわずか 15 秒間で体温が測れます。誤差は少し大きいが、平熱かどうかを確認する目的には十分です。でも、どうすればこんなに短い時間で体温が測れるのでしょう。秘密は内蔵された電子回路による指数関数の予測計算にあります。最初の 15 秒間の温度上昇傾向を分析し、10 分後の平衡状態の体温を予測するのです。正確な体温を知りたければ最低３分間、できれば５分待ってください。



２０．天文学的な数字

非常に大きな数を天文学的数字と呼びます。地球上の人口が約 77 億人（7,700,000,000 人）、日本の人口が約 1 億 2,600 万人（126,000,000 人）、年間国家予算が約 100 兆円（100,000,000,000,000 円）、地球の半径が約 6,300Km（6,300,000m）、1 秒間で地球を七回半回る光の速さは秒速 30 万 Km（300,000Km／秒＝300,000,000m／秒）、などは地上の「小さな」数字です。それでも"0"がたくさん並ぶと桁数を数えるのは大変です。大会社の決算報告では「単位：百万円」と書いて"0"の数を節約します。

宇宙の距離の最小単位は天文単位（Astronomic Unit：AU）といい、太陽の周りを公転している地球と太陽の平均距離です。平均というのは、軌道が完全な円ではなく十万年位の周期で変動しているからです。でも、せっかく天文学の話で気持ちが大きくなったので細かな話は置いておくとして、その距離はざっと 1 億 5,000 万 Km（150,000,000Km＝150,000,000,000m）です。この距離を先ほどの光の速さで割れば太陽の光が地球まで届くのに要する時間がわかり、結果は約 500 秒、つまり約 8 分 20 秒です。

天文単位は太陽系の中を測るのには便利ですが、宇宙の距離を測るのには細かすぎます。そこで光が 1 年間に進む距離、つまり 1 光年という単位を使います。どの位の距離かを計算してみましょう。ただし、ここで使う 1 年間の平均日数は、グレゴリオ暦による閏（うるう）年を補正した値です。

300,000Km／秒×60 秒／分×60 分／時間×24 時間／日×365.2425 日／年
＝300,000Km／秒×31,556,952 秒
＝9,467,085,600,000Km
＝9,467,085,600,000,000m

地球に一番近い恒星はケンタウルス座のα星で、距離は 4.36 光年だそうです。（実は同じケンタウルス座の V645 星はもう少し近く 4.243 光年ですが、15 等星と暗いので除外しました）。この距離は、という計算を上記のような"0"の羅列で計算するのは大変なので止めておきます。対数を使えば簡単だからです。ちなみに先ほどの太陽から地球までの距離 1 億 5,000 万 Km は 1.5×10^{8}Km、つまり 1.5×10^{11}m、光の速度は 3.0×10^{8}m／秒と表現できます。所要時間は距離÷速度なので、計算は次のようになります。

所用時間（秒）＝$1.5\times10^{11}／3.0\times10^{8}$
＝$1.5/3.0\times10^{11}／10^{8}$
＝0.5×10^{3}
＝5.0×10^{2}（秒）＝8 分 20 秒

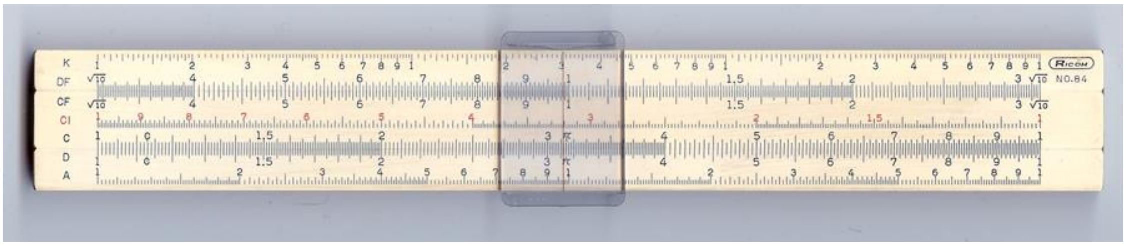
ミクロの世界でも対数表記は便利です。例えば、可視光線の波長は 380～760nm（ナノメートル）、超大規模集積回路（Very Large Scale Integrated Circuit：VLSI）の線幅は 7～14nm、細菌の大きさは 1～10μm（ミクロン）、ウイルスの大きさは数 10～数 100nm です。こうした微細な領域でも"0"をたくさん並べるのは煩雑なので、紫色の光の波長は 0.000,000,38m という代わりに 3.8×10^{-7}m と表現します。それより波長が短いのが紫外線、赤色の光の波長 7.6×10^{-7}m よりも波長が長いのが赤外線です。

２１．乗除算を加減算で

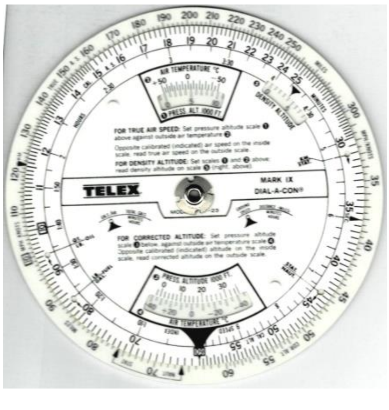
大きな数字や小さな数字を対数で表記すると便利なこと、掛け算や割り算を”0”の数を数えなくても指数部分を足したり割ったりすることで楽に計算できることはよくご存知の通りです。1.000×20,000×300,000＝6,000,000,000,000 の計算は $1\times10^3\times2\times10^4\times3\times10^5＝6.0\times10^{12}$ と簡単に計算できます。

1×2×3 の部分は普通の掛け算ですが、$10^3\times10^4\times10^5＝10\times{}^{12}$ の部分は 10 のべき乗の指数部分の足し算です。１と２と３の部分も対数表示すれば、全部を足し算で計算できるはずです。10 を底とする常陽対数を使って対数表記にしてみましょう。対数表を見れば $\log_{10}1＝0$、$\log_{10}2＝0.301030$、$\log_{10}3＝0.477121$、$\log_{10}6＝0.778151$ なので $\log_{10}1＋\log_{10}2＋\log_{10}3＝\log_{10}6$ が成り立つことがわかります。

１＋２を物差しで計算するには、1cm のところに別な物差しの先端を当てて 2cm 先を読めば元の物差しの 3cm のところを差しているので、１＋２＝３だとわかります。同様に対数目盛の物差しを使えば、１×２×３のような掛け算を足し算で計算できます。また逆に使えば、割り算を引き算で計算できます。この原理を応用したのが計算尺で、複数の対数目盛の物差しを組み合わせたものです。上下の目盛りが固定され、真ん中のスライド尺を左右に動かすことができます。透明のプラスチック板も左右にスライドでき、上下の線を合わせて結果を読み取ります。また、真ん中のスライド尺の裏側は三角関数の対数値の目盛りになっています。電卓やパソコンが普及する前の技術者の大切な道具でした。



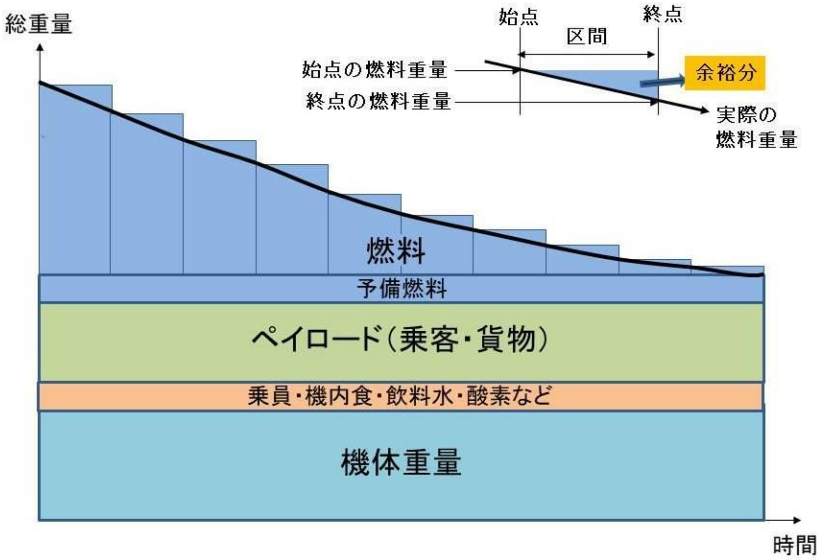
これを丸くして回転できるようにしたのが航空機用の航法計算盤です。距離と速度と時間の掛け算と割り算を計算することができます。速度 V である T 分間飛行したら距離 D はいくらか、ある距離 D を速度 V で飛行すると所要時間 T は何分か、という計算ができます。ある距離 D をある時間 T で飛びたい場合の速度 V はどの位かの計算もできますが、飛行中の航空機の速度範囲は狭いので、実際に使う機会は少なく、高度を変えた場合の風の影響の違いを試算する場合などに限られると思います。なお、内側の窓によって標準気温と実際の外気温の差による速度計の補正もできます。



２２．微分方程式で燃料節約

講演会で米国系航空会社の運航管理責任者をしている友人と同席したら、休憩時間に何やら茶色く変色した古い本を熱心に読んでいました。聞くと学生時代の微積分の教科書を復習しているとのことでした。定年が近い年齢の人なので相当昔の教科書らしく、赤鉛筆のアンダーラインが印象的でした。

興味津々でのぞき込んだので、事情を説明してくれました。国際線の大型旅客機は大量の燃料を搭載しますが、その燃料を運ぶために更に燃料が必要になります。最大離陸重量 350t の国際線長距離便の大型機のペイロードは 100t 程度なのに、140t もの燃料を搭載するのだそうです。必要燃料は飛行経路の区間毎に機体重量に対応する燃料消費量を求めて積算しているけれど、わずかに余裕を含むので全体では無視できない量の無駄になるということでした。連続的な変化を階段状に近似計算するからです。



運航中の航空機の重量内訳と燃料消費による減少

航空機は飛行中に燃料を消費すると機体重量が軽くなり、燃料効率の高いひとつ上の高度に上昇できるようになります。だから、燃料をたくさん搭載した長距離便は、一定時間飛行して燃料を消費し、機体重量が軽くなったらひとつ上の高度に上昇することを何度も繰り返します（ステップクライム方式）。それなのに余分な燃料を搭載して機体重量が重い状態の時間が長びけば、次の高度への上昇タイミングが遅れ、その分だけ余分な燃料を消費してしまうという悪循環になるのです。

でも、従来方式で区間を細かく分割すると計算が煩雑になります。そこで、連続的に変化する機体重量とそれに対応する燃料消費率を方程式にし、微分方程式を解けば最適な値が出せるはずだ、というのです。微分方程式は初期値を決めて行う積分計算なので、微積分を復習しているとのことだったのです。

後日、結果を聞いたら、具体的な数字は営業秘密だけれどかなりの量の燃料を節約できたとのことでした。ボーナスが増えるかな、冗談ですが、と笑顔でした。微積分を復習したかいがあったようです。

２３．檀葛（かずら）と文字フォント

鎌倉の鶴岡八幡宮に向かう若宮大路の「檀葛（かずら）」と呼ばれる長い参道をご存知ですか。現在は左右が自動車道路になっていて、二の鳥居から三の鳥居まで、低い石垣に挟まれた幅約９ｍの参道がまっすぐに伸びています。この参道は遠近法を応用して、鶴ケ丘八幡宮に近づくにつれて参道の幅を狭くして実際よりも長く見えるように意図的に作られています。誰がそんな知恵を出したのでしょうね。



今は文書を汎用パソコンのワープロソフトで作成しますが、昔々はワードプロセッサー（略称ワープロ）という専用の機械がありました。ドットプリンターという、文字をたくさんの点に分解して針金の先をインクリボンに打ち付けて印字する電動英文タイプライターの延長で、日本語、特に漢字が使えるものが欲しいと研究開発した成果でした。初期のものは縦横 16 点ずつ、つまり 256 点で１文字を表しましたが、画数の多い漢字は簡略化する必要がありました。

やがて縦横 24 点ずつで１文字を表せるようになり、漢字の簡略化は不要になりましたが、今度はすべての漢字の字形を記憶させる記憶装置の容量が問題になりました。値段も高かったのです。漢字には偏（へん）や旁（つくり）、あるいは冠など共通部分があるので、それを組み合わせる方法なら記憶容量が節約できる、といった研究が真剣に行われました。

やがてインクジェット式プリンターが開発され、複数の行を使えば大きな文字を印刷することができるようになりました。ところが大きな文字を点で表すにはたくさんの点のデータが必要です。そのうえ、小さな文字のデータでそのまま大きく印字すると線の太さのバランスが悪いことがわかりました。印刷業界では、同じ文字でもサイズによって線の太さを調整し、見た目のよいものを準備する伝統がありました。ひとつの文字の字形は相似形ではなく、サイズごとに微妙に最適化されていたのです。でも当時のワープロでは同様のことをするだけの記憶容量を持たせると非常に高価になりました。

そこに現れたのが「アウトラインフォント」という、台湾の天才技術者が発明した画期的な技術です。ひとつの文字を、必要最小限の点の座標データと輪郭曲線を表す計算式の係数の形で記憶しておき、印字する際に計算で文字の形を作り出す方式です。この方式はまたたく間に日本語ワープロの全メーカーに採用されました。字形は長年の実績がある活字メーカーのものが採用されたそうです。今はもうワープロという機械はありませんが、技術はパソコンの文字フォントに継承されています。さまざまなサイズの各国の文字が選択できるのはすばらしい技術ですね。

２４． ベクトルについて

「ベクトル」はドイツ語の”Vektor”に由来し、英語では”vector”（ベクター）です。物理学や数学では「ベクトル」と表記されますが、プログラミングなどでは「ベクター」または「ベクタ」と表記されます。科学技術用語の最後の長音「—」を省略するのは、日本工業規格（Japan Industry Standard : JIS）の規定によるものです。コンピューターの世界でベクトル計算といえば、行列式の計算を意味します。

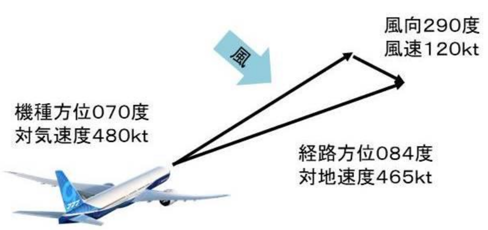
英語の辞書で”vector”を調べたら次のように書いてありました。元々はラテン語の「運ぶ」という意味の言葉”vehere”に由来しているのだそうです。航空管制官が航空機をレーダー誘導することを”Radar Vector”といいますが、病原菌や寄生虫を媒介するダニなどの昆虫も”vector”というそうです。

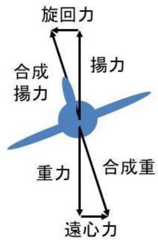
動詞　1.（飛行中の航空機を）目的とする地点に向かわせる

名詞　1. 空間内のある地点から別の地点に対する位置を決定する、方向と大きさを持つ量。

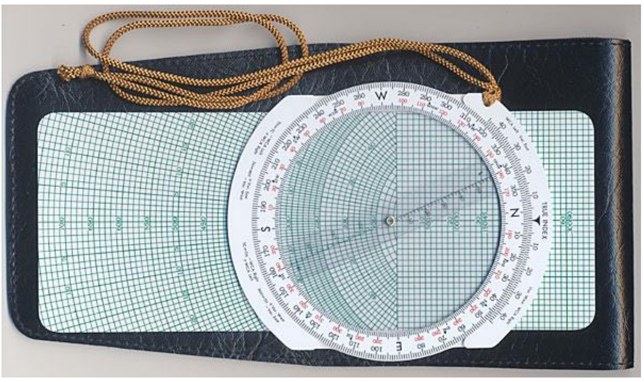
　　　2. ある動物または植物から別の動物または植物に病気や寄生虫を感染させる生物（ダニなど）

航空工学の本の最初に出てくるのが浮力、重力、推力、抗力の４つのベクトルですね。また、航空航法における偏流の計算もベクトルの合成です。航空機が旋回する際の重力と揚力、遠心力と傾斜による力の関係もベクトルの合成（または分解）によって表現できます。





計算尺のところで航空航法用の計算盤をご紹介しましたが、偏流による飛行コースのズレに関する補正ができるスライド尺がついたものがあります。航空機は大気に対して一定の対気速度と機種方位で飛行するわけですが、実際の待機中では風の影響を受けて対地速度と飛行コースが変化します。それを計算するのが下左の写真にある偏流計算盤付航法計算盤です。グラフ用紙に定規と分度器で製図するのと同様に、偏流の角度と速度を簡単に算出することができます。なお、昔の爆撃機などでは、機首の操縦席の前方下に航法士の席があり、地上の目標の動きと機首方位の差から偏流角を測定していました。



２５．レーダー誘導

航空管制官が行うレーダー誘導（Radar vector）の主な目的は、航空機の衝突を予防するために一定の間隔を確保し、進入の順序を決めることです。航空自衛隊の戦闘機が、防空識別圏（Air Defense Identification Zone: ADIZ）に接近する国籍不明機に対してスクランブルを行う場合のレーダー誘導は地上要撃管制（Ground Control Intercept：GCI）といいます。

ターミナル空域におけるレーダー誘導の対象は主に到着機です。出発機は標準計器出発経路（Standard Instrument Departure：SID）に従い各方面に分散し、速度も速く、それぞれ異なる高度に上昇するので、他機と接近することは少ないからです。到着機は各方面から航空機が集まってくるうえ減速し、所定の高度まで降下して最終進入コースに順番に並べる必要があるため、レーダー誘導が行われます。

レーダー誘導では主に機首方位（heading）を指示し、必要に応じて速度調整も行います。その際に問題になるのは風による影響です。最近の旅客機では希望する飛行コース（course）を設定すれば飛行管理システム（Flight Management System：FMS）が偏流を補正してくれますが、それ以外では自分で偏流の補正をしなければなりません。そのうえ進入中は旋回が多いので、巡行中のように補正計算をしている余裕はありません。そこで航空管制官は期待するコースを飛行するよう風の影響を考慮した機種方位をパイロットに指示します。細かい数字は無理なので方位は 10 度単位で、もちろん磁方位です。

例えば磁方位 010 度の航空路でターミナル空域に近づいた到着機に対し、航空管制官は”vector to final approach course, turn right heading 040”というような指示を出します。「あなたを最終進入コースまで誘導します。右旋回して機首方位 040 度で飛行してください」という意味です。最終進入を開始するまでの間に、同じような指示を何回か受けることになるでしょう。もちろん降下高度も何段階かに分けて指示されることがありますが、それは他の航空機との高度差を確保する必要がある場合です。

航空管制官はレーダー誘導する場合、先行する航空機との間隔、風（方向と風速）、パイロットの操作遅れ、降下に伴う減速などを考慮します。高高度から降下する場合は高度による風速の差が大きく、標準ターミナル到着経路（Standard Terminal Arrival Route：STAR）がぐるりと回る場合は相対する風向も変わります。先行機に追い付かず、後続機に追い付かれず、各方面からやってきて合流する航空機を順序良く等間隔に並べるのには高度な技量が必要です。自動化の研究は昔から行われていますが、航空機搭載機器の性能や気象情報の精度、通信技術など課題が多く、もうしばらくは航空管制官の技量に頼ることになりそうです。なお、巡行中のレーダー誘導は少なく、航空機間の間隔監視が中心です。


航空管制官


パイロット


レーダー画面

FMS 操作パネル